Goldene Schnittchen

Peter Stender

2023

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Texte zum goldenen Schnitt gibt es schätzungsweise unendlich viele, hier wird ein weiterer hinzu gefügt. Neues zum goldenen Schnitt zu schreiben ist kaum möglich, jedoch können Aspekte neu ausgewählt und kombiniert werden, so dass sich möglicherweise Einsichten ergeben. Was hier dargestellt wird, ist in in Hinblick auf praktischen Nutzen von Mathematik nur aus ästhtischen Hinsicht von Bedeutung, sowohl in der Kunst als auch inntermathematisch. Darüber hinaus ist es (leider) für die Schule von geringer Bedeutung:

- Mathematische Erkenntnisse können hilfreich sein, um sich in der Welt Sachverhalte zu erschließen oder reale Fragestellungen zu lösen (mathematisches Modellieren). Diese ist hier nicht der Fall, es sei denn ein Hersteller von Fußbodenfliesen möchte eine neue Kollektion entwickeln.

- Mathematische Erkenntnisse können innermathematisch relevant sein, wenn sie die Entwicklung weiterer neuer mathematischer Konzepte ermöglichen oder fördern. Dies wird hier kaum der Fall sein, vielmehr wird eine eigene Sichtweise zu einem schon lange gut durchdrungenen mathematischen Teilgebiet vorgestellt.

- Mathematische Erkenntnisse können fachdidaktisch relevant sein, wenn sie einen in der Lehre relevanten Sachverhalt auf neue Weise beleuchten, die Lehren und Lernen des Sachverhalts erleichtern. Der goldenen Schnitt spielt jedoch bedauerlicherweise in der Lehre der Mathematik keine große Rolle.
- Mathematische Erkenntnisse können bei einem kleinen Personenkreis mathematisch besonders interessierter Personen Freude an der Mathematik auslösen, die meist auf der Wahrnehmung der sehr speziellen Ästhetik der Mathematik beruht. Diese Personengruppe wird möglicherweise Spaß am Folgenden haben – so ging es mir zumindest.

Ich versuche hier, die Eigenschafften ebener geometrischer Objekte zu beleuchten, bei denen Streckenverhältnisse im goldenen Schnitt stehen, diese nenne ich goldene Schnittchen.

2 Grundlagen des goldenen Schnitts

Der goldene Schnitt ist in der Kunst und der Mathematik umfangreich diskutiert, das soll her nicht reproduziert werden. Es werden nur die im Folgenden verwendeten grundlegenden Eigenschaften dargestellt.

Die Grundidee des goldenen Schnitts ist es, dass eine Strecke in zwei ungleich lange Teile geteilt wird, so dass das Verhältnis der kurzen Strecke zu langen Strecke identisch ist zum Verhältnis der langen Strecke zur ganzen Strecke. Dies wird üblicherweise folgendermaßen dargestellt:

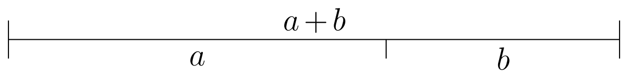

Abbildung 1: Strecke geteilt im goldenen Schnitt

Diese Situation kann in die folgende Gleichung übersetzt werden:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} \tag{1}$$

Diese Gleichung kann derart umgeformt werden, dass der Faktor $\frac{a}{b}$ bestimmt werden kann:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} \tag{2}$$
$$a^2 = b \cdot (a+b) \tag{3}$$
$$a^2 = a \cdot b + b^2 \tag{4}$$
$$a^2 - a \cdot b - b^2 = 0 \tag{5}$$
$$a = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2} \tag{6}$$
$$a = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + b^2} \tag{7}$$
$$a = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{5b^2}{4}} \tag{8}$$
$$a = \frac{b}{2} \pm \frac{b}{2}\sqrt{5} \tag{9}$$
$$a = b \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{10}$$

Von (9) zu (10) wurde das negative Vorzeichen weggelassen, da aufgrund der geometrischen Situation ein positiver Faktor gesucht wird. Für den gesuchten Faktor $a = \Phi \cdot b$ gilt also:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0,5 + \sqrt{1,25} \approx 1.61803398874989. \tag{11}$$

Dennoch hat die negative Lösung von (9) eine Bedeutung, was man sieht, wenn man die beiden Lösungen multipliziert (ohne das b)

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1-5}{4} = -1 \tag{12}$$

Daher ist

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\Phi} \approx -0.61803398874989 \tag{13}$$

Das obige Vorgehen mit zwei Variablen a, b ist eigentlich mathematisch untypisch. Wenn mit zwei Größen gearbeitet wird, bei denen es nur auf das Verhältnis ankommt, wird in der Mathematik eine der Größen auf **Eins** normiert und dann das Verhältnis mit einer Bezeichnung (hier Φ) versehen. Dies kann hier auf drei verschiedene Weisen realisiert werden (Abbildungen 2, 3, 4):

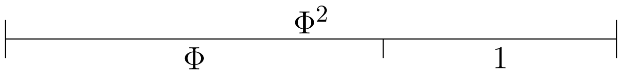

Abbildung 2: Goldener Schnitt normiert $b = 1$

Zu Abbildung 2 gehören die Gleichungen

$$\Phi^2 = 1 + \Phi \tag{14}$$

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \tag{15}$$

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \tag{16}$$

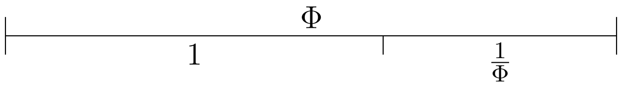

Abbildung 3: Goldener Schnitt normiert $a = 1$

Zu Abbildung 3 gehört die Gleichung

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \tag{17}$$

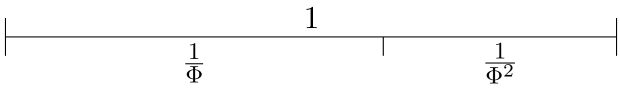

Abbildung 4: Goldener Schnitt normiert $a + b = 1$

Zu Abbildung 4 gehört die Gleichung

$$1 = \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} \tag{18}$$

Gleichung (18) kann man aus Gleichung (17) gewinnen, indem man durch Φ teilt, ebenso (17) aus (14). Jede dieser Gleichungen tritt jedoch im Weiteren auf, so dass alle drei wertvoll sind.

Wegen (14) haben Φ und Φ^2 dieselben Nachkommastellen. Wegen (17) haben $\frac{1}{\Phi}$ und Φ dieselben Nachkommastellen ((11) und (13)). Der rekursive Bezug des goldenen Schnitts ist also auch in der Dezimaldarstellung sichtbar – ebenso in jedem anderen Stellenwertsystem. Es gilt also

$$\Phi^2 \approx 2.61803398874989. \tag{19}$$

Fasst man (14) als Gleichung auf, die die Schnittpunkte zweier Funktionen beschreibt, kann der goldene Schnitt auch funktional im Koordinatensystem betrachtet werden. Hier haben auch die negativen Lösungen der quadratischen Gleichungen Bedeutung. Die Gleichungen (17) und (18) können ebenfalls abgelesen werden.

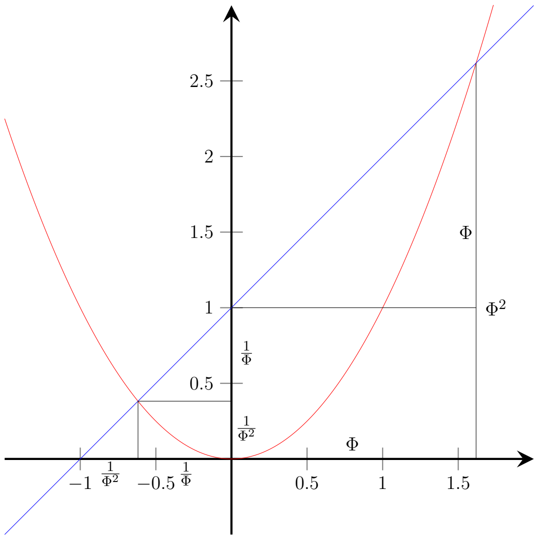

Abbildung 5: Goldener Schnitt funktional

3 Erstes Schnittchen

Das einfachste ebene geometrische Objekt, dessen Kanten den goldenen Schnitt zeigen, ist ein Rechteck mit den Kantenlängen Eins und Φ. Trennt man von dem Rechteck ein

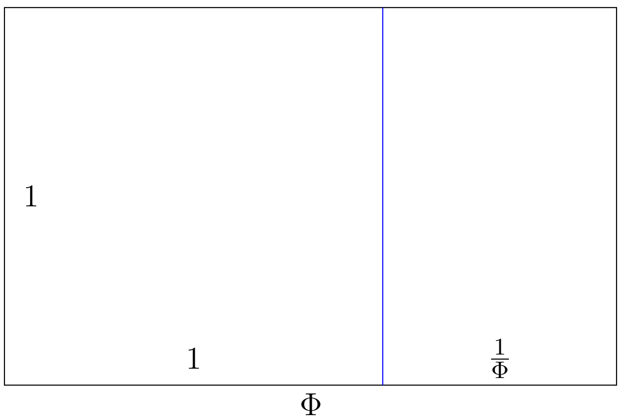

Abbildung 6: Goldenenes Rechteck

Quadrat der Kantenlänge Eins ab, so entsteht ein neues Rechteck mit den Kantenlängen Eins und $\frac{1}{\Phi}$, also ein Rechteck mit den Seitenverhältnissen des goldenen Schnitts. Da die Forderung nach dieser Eigenschaft durch Gleichung (18) beschrieben wird, ist dies auch das einzige Rechteck, das die Eigenschaft hat, dass nach abtrennen eines Quadrats wieder ein Rechteck mit denselben Seitenverhältnissen entsteht[1].

In der Mathematik ist es naheliegend, so eine geometrische Situation zu iterieren: Führt man dies im Grenzwert unendlich oft aus, wird das goldene Rechteck vollständig

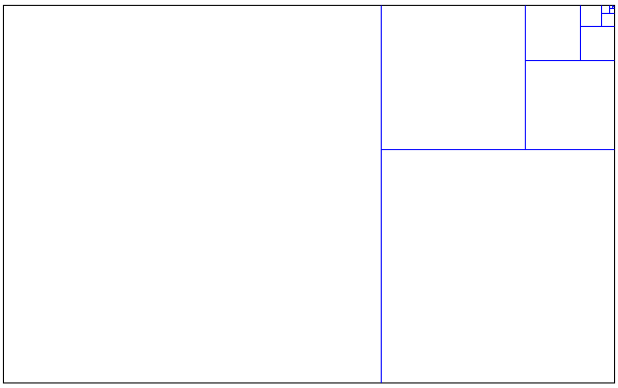

Abbildung 7: Goldenenes Rechteck iteriert

durch Quadrate ausgelegt. Die einzelnen Quadrate haben offensichtlich die Kantenlängen

$$1,\ \frac{1}{\Phi},\ \frac{1}{\Phi^2},\ \frac{1}{\Phi^3},\ \frac{1}{\Phi^4},\ \frac{1}{\Phi^5},\dots \tag{20}$$

Damit haben die Quadrate die Flächeninhalte

$$1^2,\ \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2,\ \left(\frac{1}{\Phi^2}\right)^2,\ \left(\frac{1}{\Phi^3}\right)^2,\ \left(\frac{1}{\Phi^4}\right)^2,\ \left(\frac{1}{\Phi^5}\right)^2,\dots \tag{21}$$

oder besser (Repräsentationswechsel für bessere Einsichten)

$$\left(\frac{1}{\Phi^2}\right)^0,\ \left(\frac{1}{\Phi^2}\right)^1,\ \left(\frac{1}{\Phi^2}\right)^2,\ \left(\frac{1}{\Phi^2}\right)^3,\ \left(\frac{1}{\Phi^2}\right)^4,\ \left(\frac{1}{\Phi^2}\right)^5,\dots \tag{22}$$

Da das ganze Rechteck den Flächeninhalt Φ hat muss also gelten

$$\Phi = \left(\frac{1}{\Phi^2}\right)^0 + \left(\frac{1}{\Phi^2}\right)^1 + \left(\frac{1}{\Phi^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Phi^2}\right)^3 + \left(\frac{1}{\Phi^2}\right)^4 + \left(\frac{1}{\Phi^2}\right)^5 \dots \tag{23}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\Phi^2}\right)^k \tag{24}$$

[1]Das DIN-A-Format hat eine ähnliche Perspektive: Im DIN-A-Format wird halbiert und dabei entstehen zwei Teilrechtecke mit gleichem Seitenverhältnis wie das Ausgangsrechteck. Zusammen mit der Eigenschaft, dass DIN-A0 den Flächeninhalt 1m^2, ist die Größe aller DIN-A Papiere eindeutig festgelegt. Das Seitenverhältnis beträgt $\sqrt{2}$. $16 = 2^4$ Blatt DIN-A4 haben also per Definition den Flächeninhalt 1m^2. 500 Blatt 80gr DIN-A4 wiegen dann exakt $2{,}5$kg.

Dies ist eine geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{\Phi^2}$, so dass der Beweis auch formal gelingt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \Rightarrow \tag{25}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\Phi^2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{\Phi^2}} = \frac{1}{\frac{1}{\Phi}} = \Phi \tag{26}$$

Dabei wurde Gleichung (18) im vorletzten Schritt verwendet.

Hier zeigt sich einerseits, dass der Selbstbezug des goldenen Schnitts auch im Unendlichen auftritt, andererseits wie figurierte Zahlen komplexe Sachverhalte (hier die unendliche Summe) gut veranschaulichen.

4 Das Pentagramm - die Ikone des goldenen Schnitts

Das Pentagramm enthält bekanntermaßen Strecken, die sich im goldenen Schnitt teilen. Es wird zunächst schrittweise die Konstruktion des Pentagramms dargestellt und dabei werden die auftretenden Winkel notiert, da diese Winkel wiederholt auftreten und die sich so konstituierenden ähnlichen gleichschenkligen Dreiecke die Grundlage für den Nachweis des goldenen Schnitts bilden. Aufgrund der Symmetrie der Figur treten die notierten Winkel natürlich vielfach auf, werden jedoch im Sinne der Übersichtlichkeit jeweils nur einmal eingezeichnet. Die Winkel ergeben sich aus der Teilung des Vollkreises in fünf gleicheTeile (links), mit diesen Ergebnissen aus der Winkelsumme in gleichschenkligen Dreiecken (mitte), und dann nochmals mit Winkelsummen und Nebenwinkel (rechts).

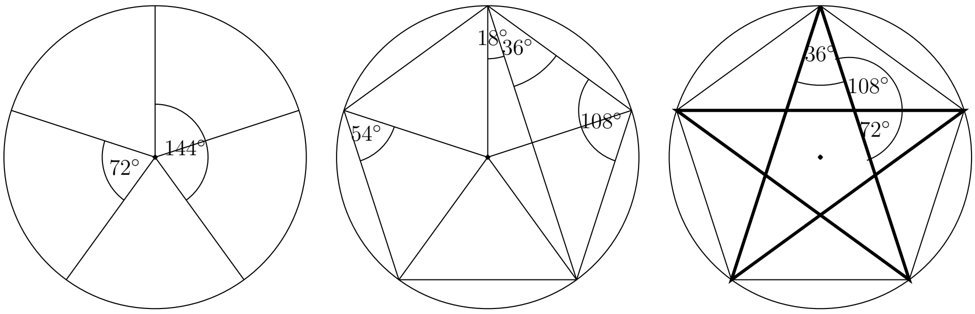

Abbildung 8: Pentagramm Konstruktionsschritte

Das blaue und das rote Dreieck in Abbildung 9 sind ähnlich, wie man aufgrund der oben notierten Winkel sieht (Dreiecke gleichschenklig, größter Winkel 108°). Da in ähnlichen Dreiecken die Längenverhältnisse der denselben Winkeln gegenüberliegenden Kanten gleich sind gilt

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{a+b} \tag{27}$$

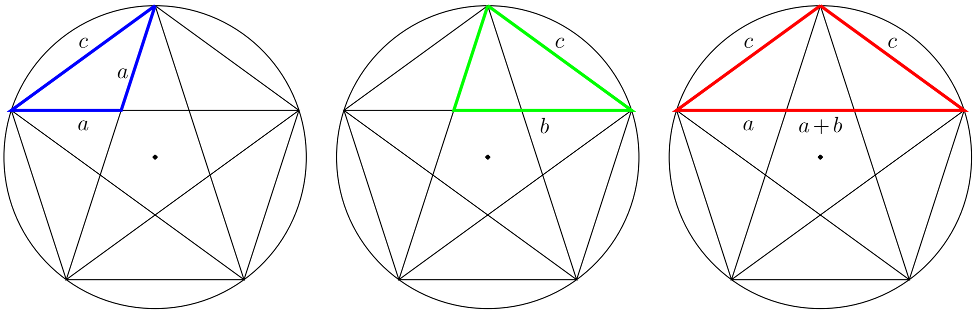

Abbildung 9: Pentagramm Teildreiecke

Dies sieht fast so aus, wie die Gleichung (1), die den ersten Ansatz zum goldenen Schnitt definiert. Wann $b = c$ gezeigt werden kann, sind beide Gleichungen identisch und es ist bewiesen, dass a und b die Strecke $a + b$ im goldenen Schnitt teilen. Da das grüne Dreieck gleichschenklig ist, was wiederum aus den oben notierten Winkeln folgt (36°, 72°,72°), gilt $b = c$ und die goldene Schnitt Eigenschaft ist gezeigt. Es gilt also mit den Bezeichnungen aus Abbildung 9

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b} \tag{28}$$

beziehungsweise

$$c = b = a \cdot \Phi, \; a + b = b \cdot \Phi. \tag{29}$$

5 Pentagramm Schnittchen

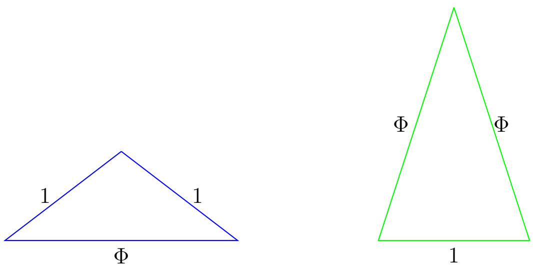

Abbildung 10: Pentagramm Schnittchen

Für das grüne und das blaue Dreieck in Abbildung 9 ist durch Gleichung (29) bereits gezeigt, dass die Seiten sich im goldenen Schnitt verhalten. Damit sind dies zwei dreieckige goldene Schnittchen[2] (die Längen sind jeweils so normiert, dass die kürzere Kante die Länge Eins hat). Die Winkel in dem blauen Dreieck haben die Größen 108° und 36°, die Winkeln in dem Grünen Dreieck 72° und 36°. Da es nur zwei gleichschenklige Dreiecke

[2]Diese beiden Dreiecke werden auch als „Robinson Dreiecke“ oder als „goldene Dreiecke„ bezeichnet.

mit Winkel 36° gibt, nämlich die beiden hier gezeigten, gilt: In einem gleichschenkligen Dreieck mit (mindestens) einem Innenwinkel 36° stehen die Seiten im Verhältnis des goldenen Schnitts zueinander.

Liebhaber analytischer Werte für die Winkelfunktionen können hier ihr Repertoire ergänzen.

Im blauen Dreick gilt

$$\cos(36^\circ) = \sin(54^\circ) = \frac{\frac{\Phi}{2}}{1} = \frac{\Phi}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \tag{30}$$

Im grünen Dreick gilt

$$\cos(72^\circ) = \sin(18^\circ) = \frac{\frac{1}{2}}{\Phi} = \frac{1}{2\Phi} = \frac{1}{\frac{2\cdot(1+\sqrt{5})}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} \tag{31}$$

Weitere Werte können nach Berechnung der Höhen oder mit $\sin^2 + \cos^2 = 1$ bestimmt werden, diese enthalten jedoch mehrere Wurzeln und werden daher hier nicht aufgeführt.

6 Goldene Diamonds

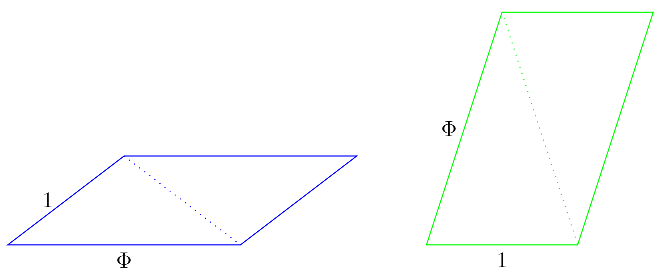

Abbildung 11: Parallelogramme

Zwei gleiche gleichschenklige Dreiecke kann man auf zwei verschiedene Weisen zu einem Parallelogramm zusammensetzen: entweder legt man die doppelt auftretenden Kanten aneinander (Abbildung 11) oder die Basen (Abbildung 12). Im zweiten Fall sind alle vier Seiten gleich lang und es entsteht ein Rhombus[3]. Nutzt man dafür die Pentagramm Schnittchen, dann dann stehen Kanten oder Diagonalen wiederum im goldenen Schnitt zueinander. Mit diesen Figuren kann man (wie mit allen Parallelogrammen) die Ebene parkettieren. Parallelogramme, deren Seiten im goldenen Schnitt zueinander stehen, kann man beliebig viele herstellen, indem man von den Paralellogrammen aus Abbildung 11) ausgeht und bei konstanten Seitenlängen die Winkel variiert. Die Versionen aus (Abbildung 11) sind besonders, da eine Diagonale dieselbe Länge hat wie eine der Seiten und daher der goldene Schnitt auch mit der Diagonalen gilt.

[3]Rhombus, Raute oder Karo, letzeres heißt auf englisch "Diamond".

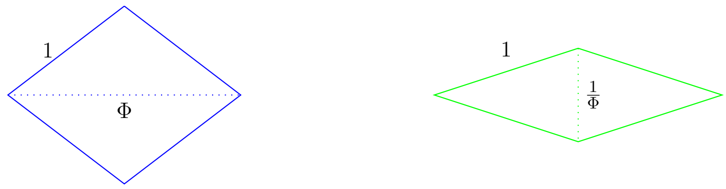

Abbildung 12: Rauten

Mit Parallelogrammen kann man die Ebene mit einem translationsysmmetrieschen Muster lückenlos auslegen, also parkettieren. Parkettierungen sind ein sehr schönes Unterrichtsthema in Jahrgang 5/6, da hier unterschiedliche geometrische Objekte (Dreiecke, Vierecke, Sechsecke) mit ihren Symmetrieeigenschaften wirksam werden und man durch Abwandlungen der Grundparkette äthetisch anspruchsvolle Darstellungen erhält, die in den Escher-Parketten ihren Höhepunkt finden. Neben Parketten aus einer einzigen geometrischen Grundfigur (platonische Parkette) können auch zwei Grundfiguren Anwendung finden (aristotelische Parkette). Eine herausragende Rolle spielen die weiter unten behandelten Penrose Parkette, die unregelmäßig sind (also nicht translationssymmetrisch) und eine fünfzählige Drehsymmetrie aufweisen. Hierfür sind als Grundelemente die gezeigten Diamonds geeignet, ebenso wie die im nächsten Abschnitt beschriebenen Kites and Darts.

7 Goldene Darts und Kites

Für Darts und Kites werden jeweils zwei dreieckige Schnittchen zu einem Drachenviereck zusammengesetzt. Zwei grüne Dreiecke ergeben ein konvexes Drachenviereck (englisch "kite"), zwei blaue ein konkaves (englisch "dart"). Die Drachenvierecke können auch direkt im Pentagram gesehen werden. Ein Kite und ein Dart können zu der rote Raute zusammengesetzt werden, diese ist eine vergrößerte Version der blauen Raute aus Abbildung 12.

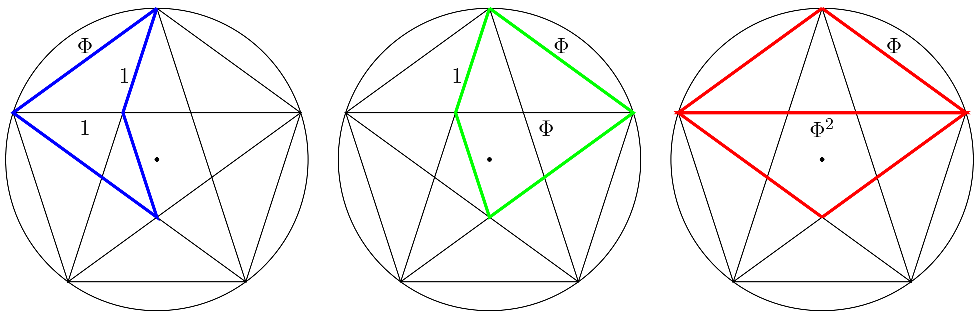

Abbildung 13: Darts und Kites

Auch die Kites und Dart erben offensichtlich die golden Seitenverhältnisse von den dreieckigen Schnittchen. Legt man ein Kite und ein Dart geeignet zusammen, erhhält man wieder ein Diamond (rot), bei dem die Diagonale im goldenen Schnitt zur Kante steht.

8 Zerlegen uns Zusammensetzen

Bereits in Abbildung (9) ist zu erkennen, dass man bei geeigneter Skalierung ein blaues und ein grüns dreieckiges Schnittchen zusammensetzen kann, so dass eine größere Version des blauen Schnittchens entsteht.

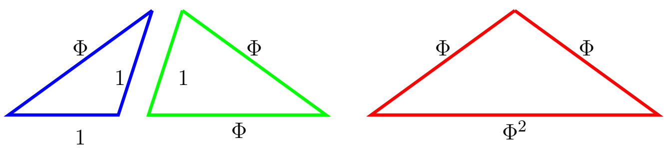

Abbildung 14: Schnittchen kombiniert

In analoger Weise kann man ein blaues und ein grünes dreieckiges Schnittchen bei geeigneter Skalierung zu einem größeren grünen Schnittchen zusammensetzten (Abbildung 15).

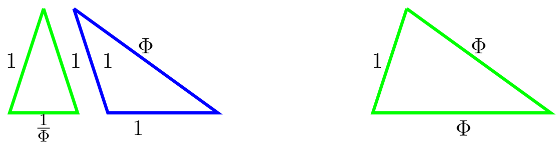

Abbildung 15: Schnittchen kombiniert

Zerlegungen und Zusammensetzungen sind vielfältig und können z. B. in Abbildung 13 entdeckt werden. Solche Zerlegungen können iteriert werden und dabei können bei geeigneter Wahl der Zerlegung Penrose-Parkette erzeugt werden[4].

Die im Folgenden hier gezeigten Penrose-Parkette wurden durch Aneinanderlegen von Kites and Darts bzw. Diamonds von innen nach außen konstuiert. Entsprechende Puzzleteile finden sich als Kopiervorlage im Anhang und können so in der Schule zum Training von Kopfgeometrie genutzt werden. Im Vergleich dazu entspricht die Konstruktion durch Zerlegen dem Konzept des Rückwärtsarbeitns und ist damit zunächst kognitiv deutlich anspruchsvoller.

[4]http://news.povray.org/povray.binaries.images/attachment/%3C4aeba15d%40news.povray.org%3E/penrosedeflation15_27.jpg

9 Penrose-Parkette

Pentrose Parkette zeichnen sich dadurch aus, dass sie lokal eine Drehsymmetrie um den Winkel 72° aufweisen, also eine fünfzählige Symmetrie. Penrose Parkette sind jedoch nicht tranlationssymmetrisch. Teile des Parketts treten als Translation immer wieder auf, es wirkt also lokal so, als würde eine Translationsysmmetrie vorhanden sein, diese gilt aber nie für das ganze Parkett, sondern immer nur für Ausschnitte, d. h. nur lokal, nie global. Es gibt unendlich viele verschiedene Penrose Parktette. Beim Kreieren von solchen Parktetten mit Hilfe der Grundelemente gibt es also sehr viele Freiheiten. Hier werden zwei Ansätze für Penrose Parkette gezeigt, zunächst basierend auf Darts und Kites, dann auf Diamonds.

9.1 Penrose-Parkette Kites und Darts

Da man aus einem Kite und einem Dart ein Diamond zusammenfügen kann und mit den Diamonds die Ebene regelmäßig parkettieren kann, benötigt man eine Zusatzregel, um diese Regelmäßigkeit zu verhindern, so dass Penrose Parktette entstehen. Dazu werden in die Kites und Darts Kreisbögen mit den Radien $\frac{1}{\Phi}$, 1 und Φ in zwei verschiedenen Farben eingezeichnet und verlangt, das diese Kreisbögen beim puzzeln immer farblich und räumlich zueinander passen. Dies zeigt Abbildung 16.

Das entstehende Parkett wird ohne Kreisbögen in Abbildung 17 gezeigt. In Abbildung 18 sind die Kites und Darts unterschiedlich eingefärbt. Alle Abbildung mit den unterschiedlichen Farbgebungen verdeutlichen verschiedene Aspekte des Penrose-Parketts und sind damit wertvoll für das Verständnis. Dies ist ein Beispiel dafür, wie Farben in mathematischen Repräsentationen bestimmte Informationen betonen können.

Penrose-Parkette sind nur dann Parkette, wenn man mit diesem Verfahren sicher die gesamte Ebene auslegen kann. Dafür wird hier nur eine Beweis*idee* vorgestellt (Abbildung 19):

Man erzeugt aus dem dargestellten schwarzen Parkett eine um Φ^2 vergrößerte Version. Dies ist exemplarisch mit grün Kites und blauen Darts dargestellt. Man sieht, dass diese *fast* zu der schwarzen Zeichnung passt. Die Unterschiede sind gering und führen auf bekannte goldene Schnittchen.

Vergrößert man das schwarz gezeichnete Penrose-Parkett mit dem Faktor Φ^2 und füllt die entstandenen Kites und Darts geeignet mit “kleinen” Kites und Darts, entsprechend der Beziehung zu den grün Kites und den blauen Darts, entsteht ein Parkett, das einen größeren Teil der Ebene abdeckt als das ursprüngliche schwarze Parktett. Iteriert man diesen Schritt, ist offensichtlich, dass man die ganze Ebene mit der Penrose-Konstruktion lückenlos ausfüllen also parkettieren kann.

Für einen echten Beweis muss jetzt detailliert nachgewiesen werden, dass die oben genannten Abweichungen zwischen den grünen bzw. blauen Kites und Darts und den scharzen Linien nicht zu Problemen führen. Dies gelingt durch eine Abfolge detaillierte Argumente zum Zerlegen von goldenen Schnittchen, die gegenüber dem pauschalen

Bild keine tieferen Einsichten liefern, so dass es hier bei dieser groben Beiweisidee bleibt. Lediglich Personen, die den Iterationsschritt im Rahmen eines Computerprogramms nutzen wollen, um ein sehr großes Bild des Parketts zu erzeugen, müssen sich die Beziehung zwischen dem schwarzen und dem grünen Muster detailliert klar machen.

Für händisches Puzzeln finden sich in der Anlage Vorlagen zum Ausschneiden.

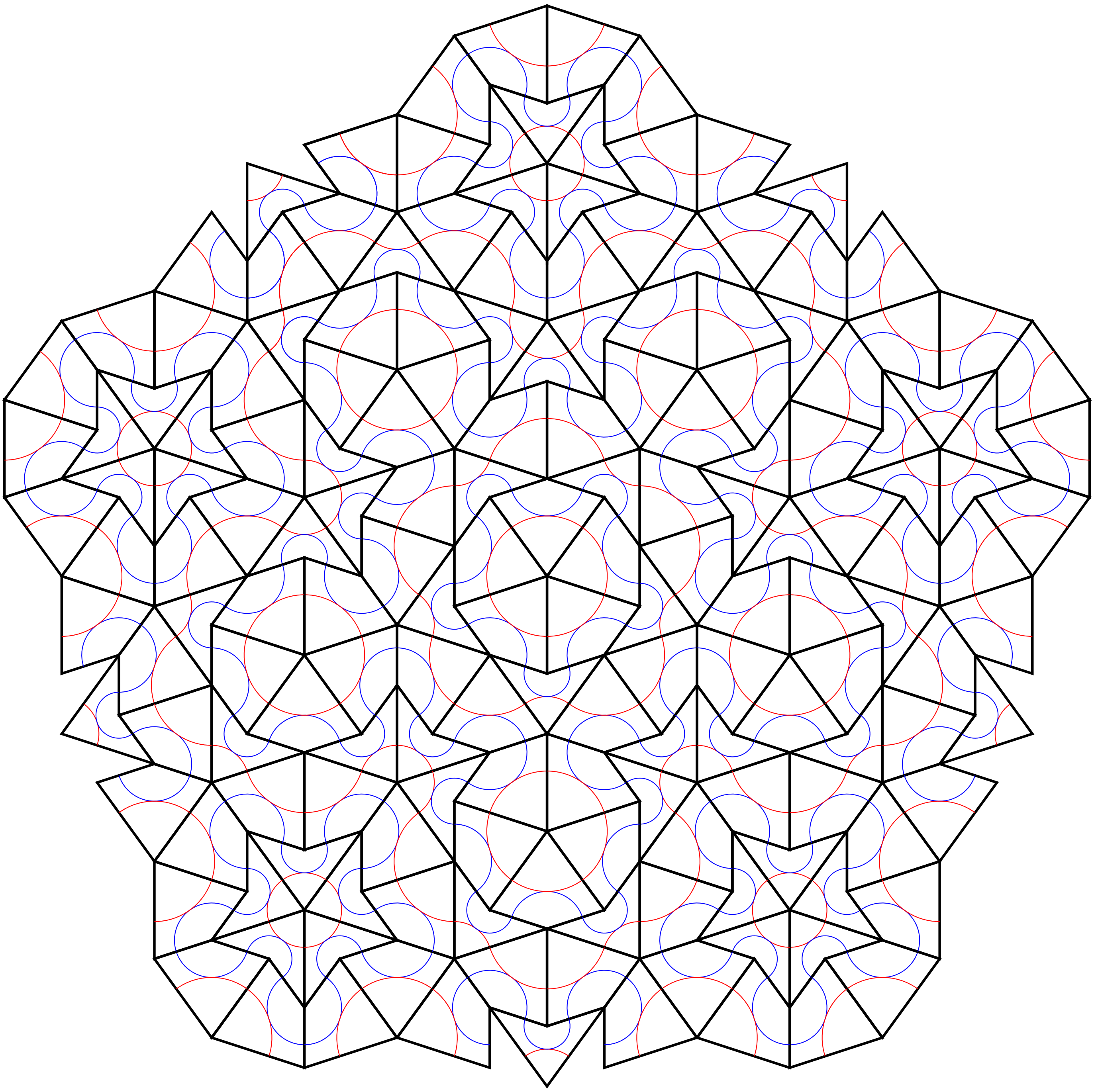

Abbildung 16: Penrose Parkett aus Darts und Kites mit Kreisbögen

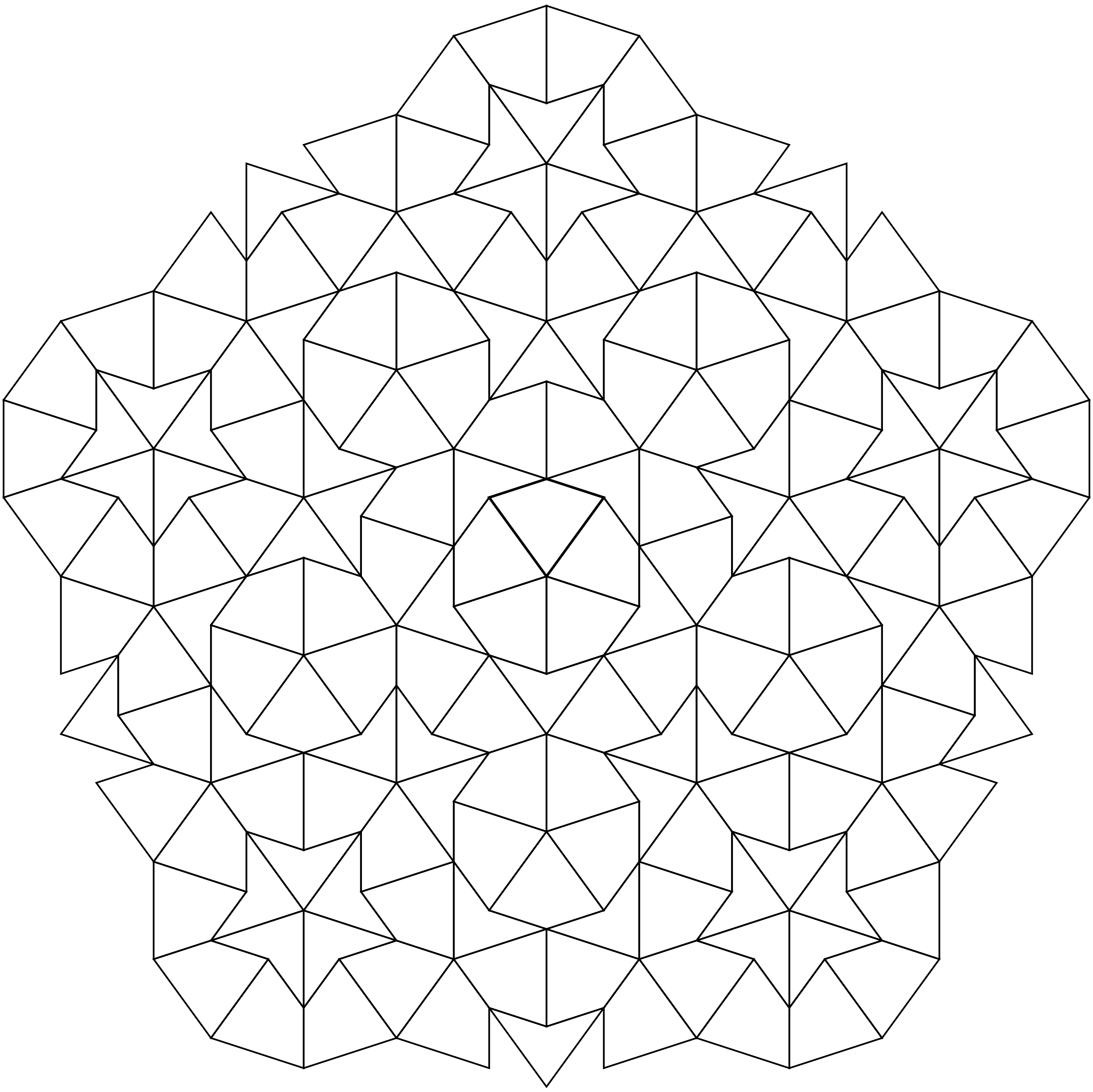

Abbildung 17: Penrose Parkett aus Darts und Kites

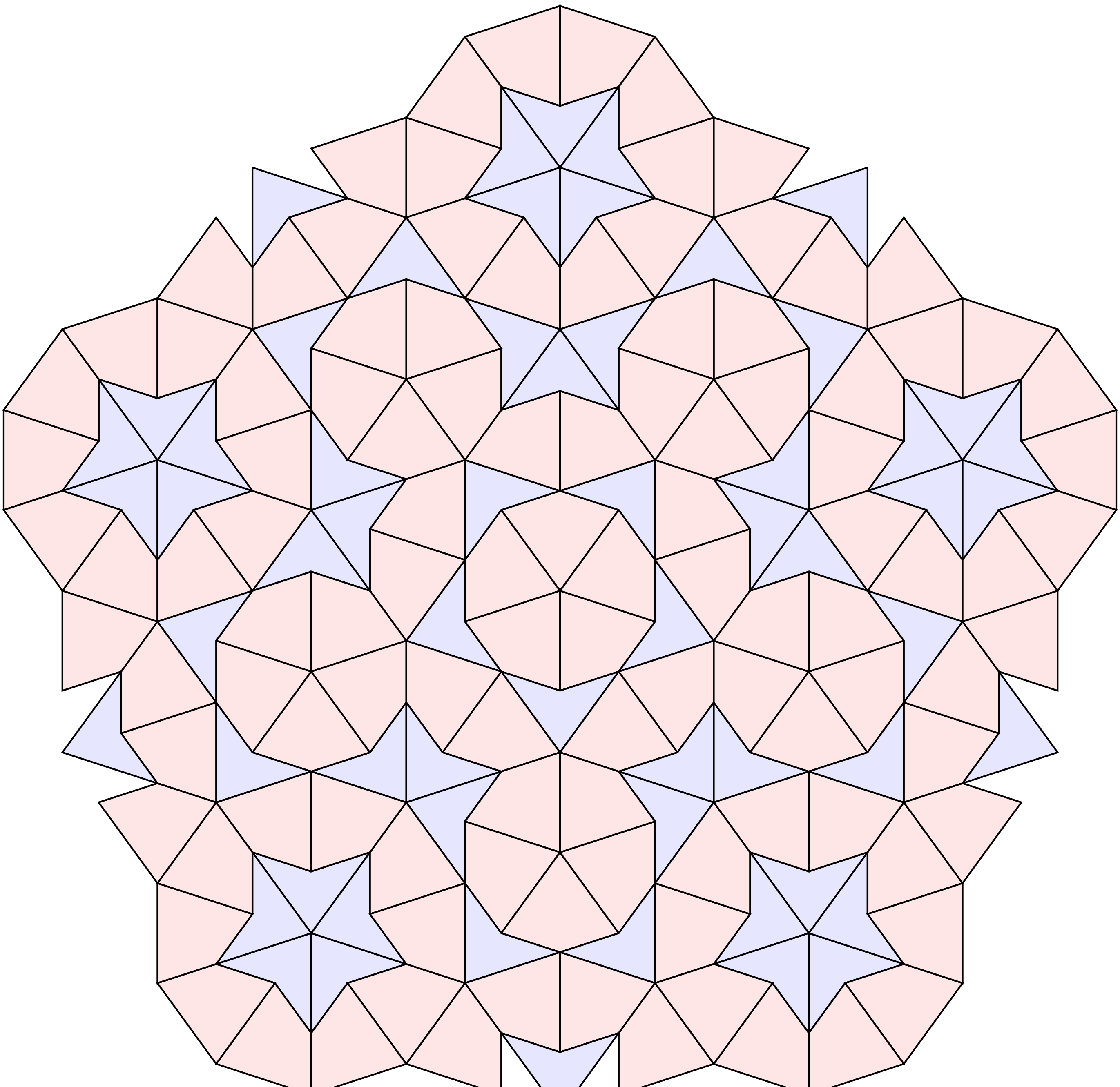

Abbildung 18: Penrose Parkett aus gerfärbten Darts und Kites

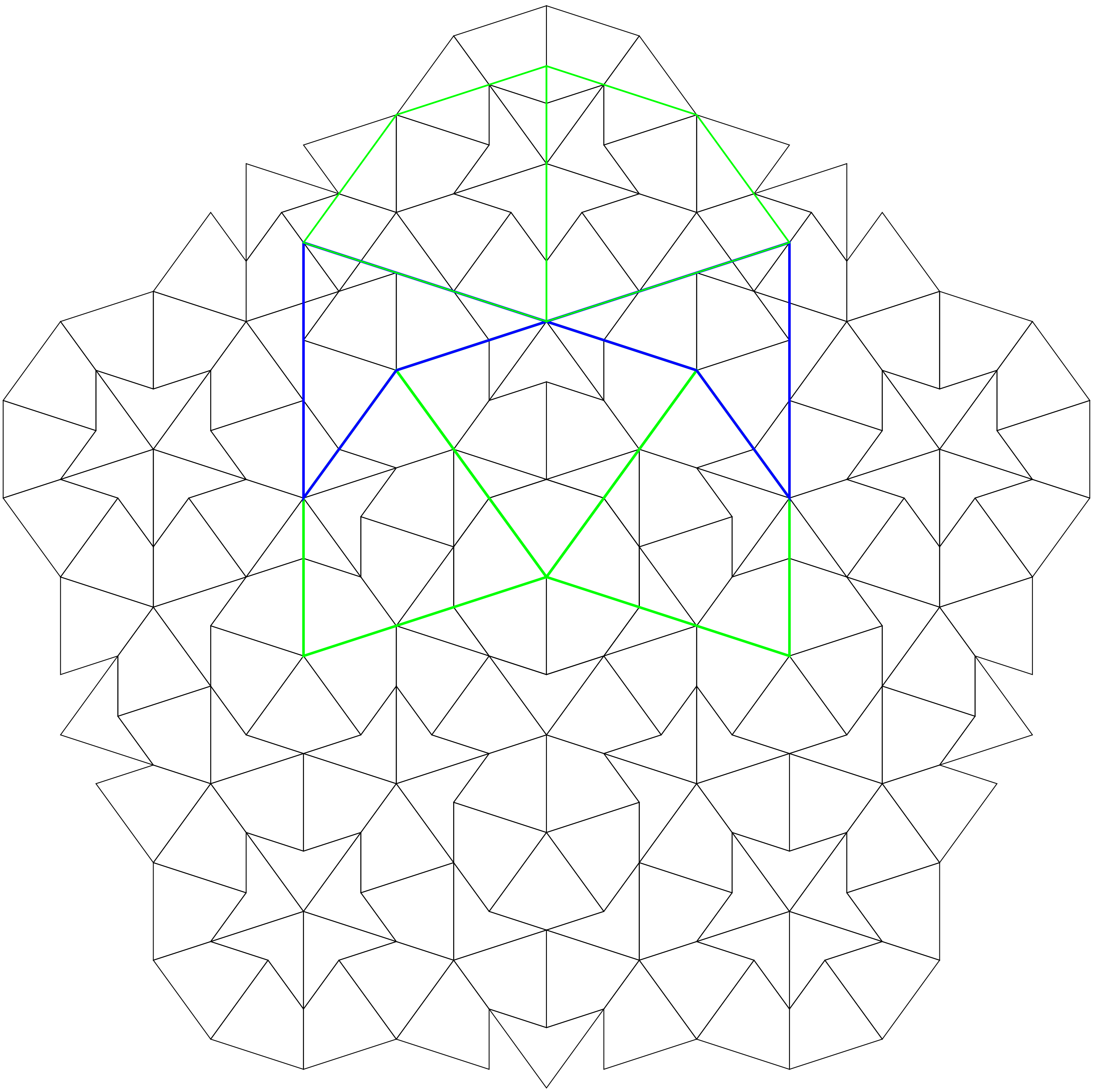

Abbildung 19: Penrose Parkett aus Darts und Kites plus gestreckten

9.2 Penrose-Parkette Diamonds

Diese Parkette entstehen in voller Analogie zu den oben gezeigten, daher werden hier nur die analogen Abbildungen ohne weitere Erläuterungen gezeigt.

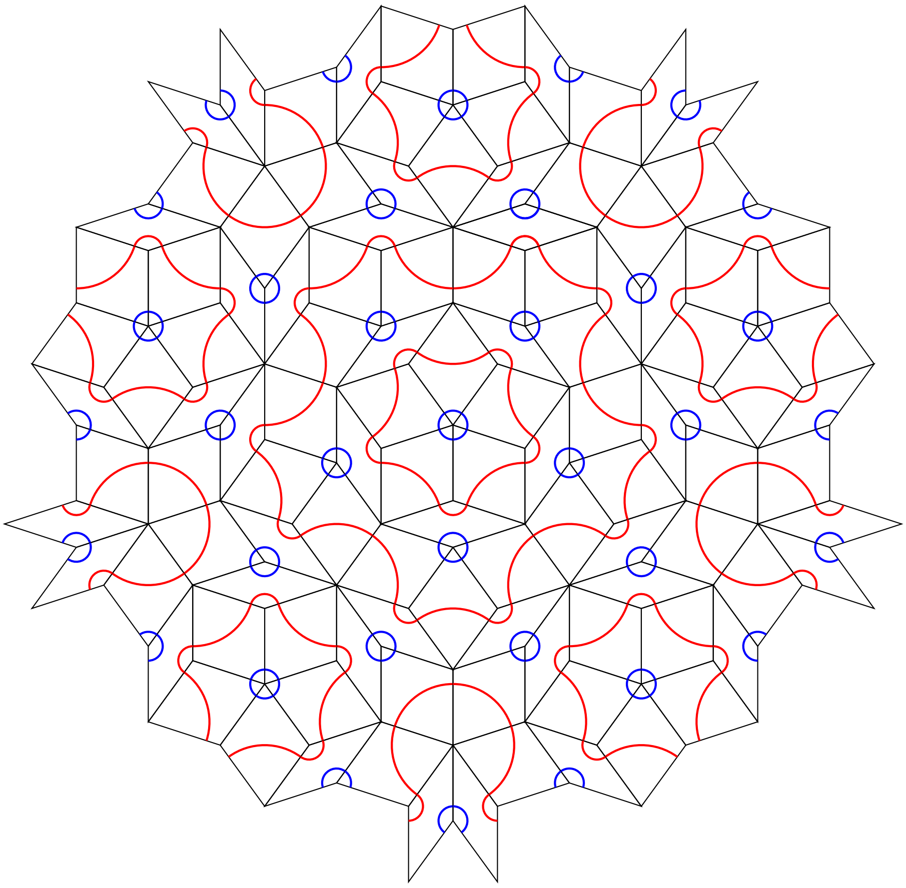

Abbildung 20: Penrose Parkett aus Diamonds mit Kreisbögen

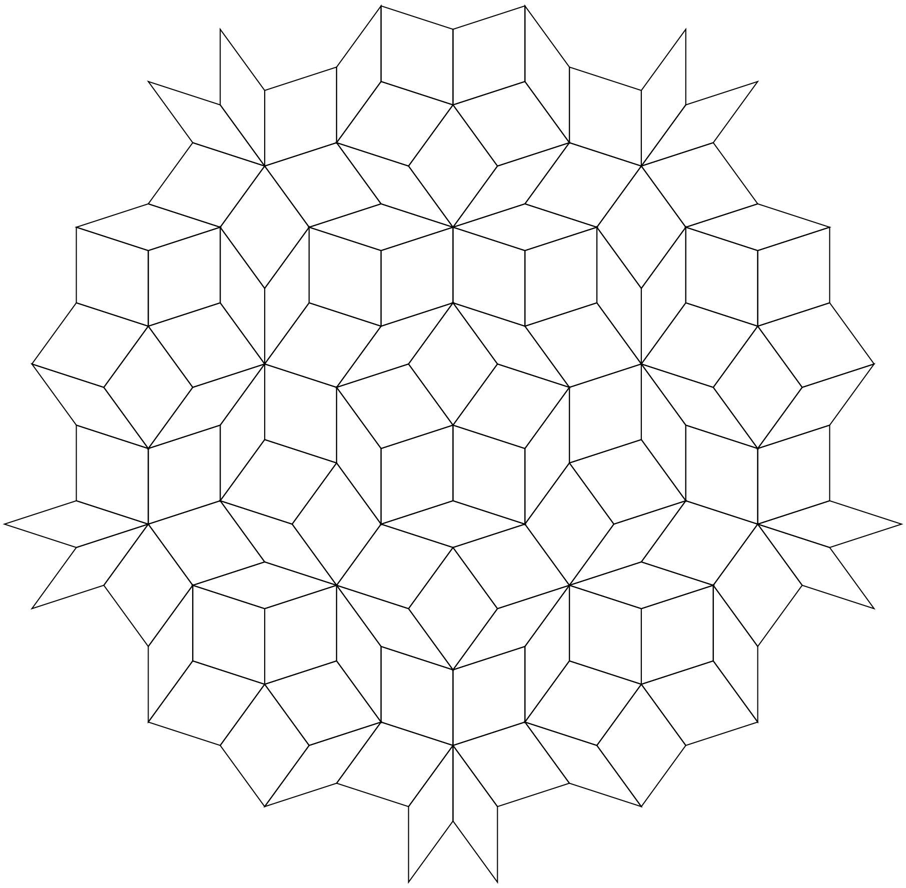

Abbildung 21: Penrose Parkett aus Diamonds

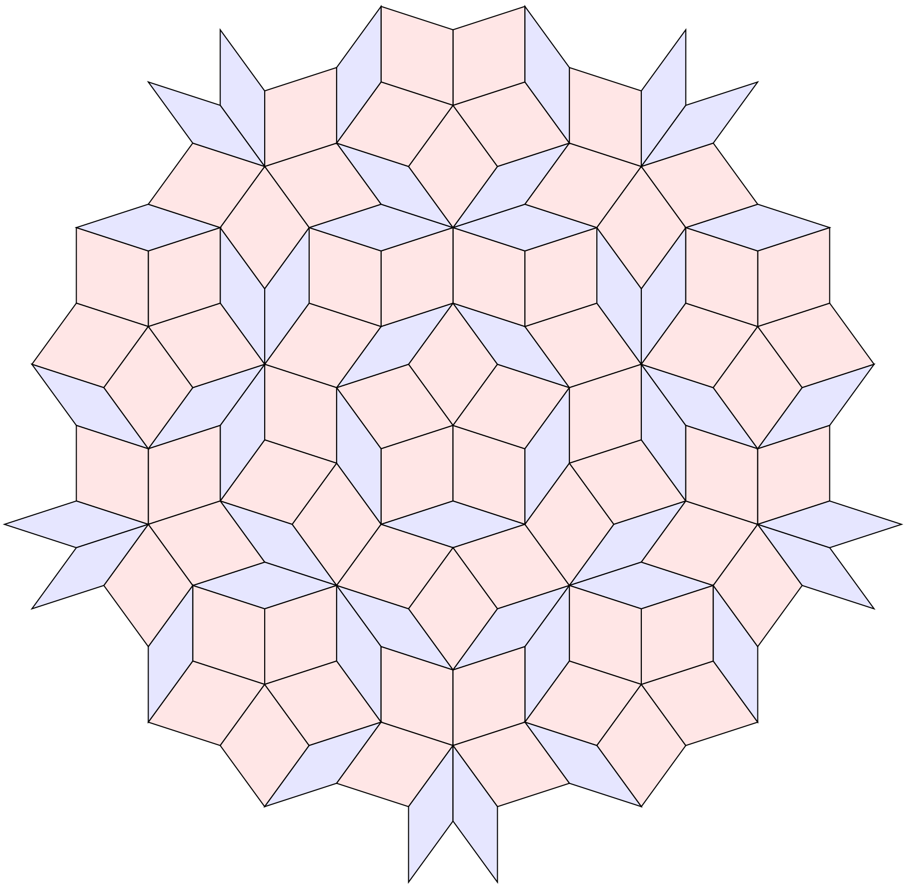

Abbildung 22: Penrose Parkett aus Diamonds gefärbt

Anhang