Mathematikunterricht mit dem Spirographen

Ein Spielzeug wird zum Problem

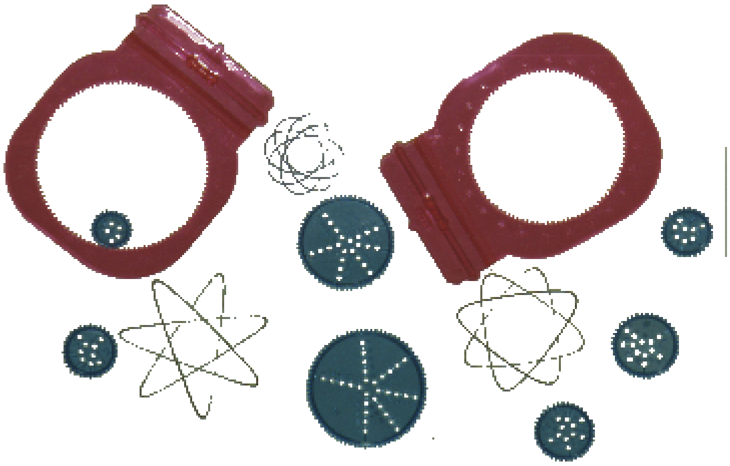


Abbildung 1: Spirograph und erzeugte Kurven

‘Papi, kannst Du mir bitte den da hier noch mal malen, den finde ich so schön?’ sagte meine Tochter zu mir und deutete auf eine der etwa 10 Spirographenfiguren auf einem Blatt Papier. Sie hatte den Spirographen in einem Geschäft entdeckt, aber ihre Finger erwiesen sich noch als zu klein, die ruhenden Schablonen zu halten und so zeichnete ich die Rollkurven. Und nun hatte ich das Dilemma: eine Anzahl Schablonen und mehrere Kreisscheiben lagen auf dem Tisch und die Frage stand im Raum, wie hatte ich genau diese Figur zustande gebracht. Da half zunächst nur Probieren - für mich als Mathematiker aber war eine Fragestellung formuliert, die mir nicht mehr aus dem Kopf ging:

Kann man einer fertigen Rollkurve, speziell einer Spirographenkurve ansehen, mit Hilfe welcher Kreisradien und welchem Zeichenloch für den Stift sie hergestellt wurde?

Die Antwort vorweggenommen: man kann und zwar auch in der Schule im Ergänzungskurs oder in Jahrgang 10 als Problembereich zu Kreisumfang, *sin*, *cos* und deren Anwendung, Gleichungssystemen und der Formulierung von Sachverhalten in Termen. Wird ein Computeralgebrasystem herangezogen, können die Spirographenfiguren auch mit dem Rechner erzeugt werden. Teile der Unterrichtsinhalte sind auch in der Unterstufe bei Zählprozessen und der Vorbereitung von Bruchrechnen und Teilbarkeitslehre geeignet.

Einfache Spirographenfiguren im Unterricht

Zum Einstieg sollten die Schüler Gelegenheit bekommen, mit dem Spirographen Figuren zu zeichnen um dann zu versuchen, die entstandenen Figuren zu systematisieren. Aus praktischen Gründen zeichnet jeder Schüler mit einem festen Schablonenpaar (Abbildung 1: ein Ring und ein Kreis) und verschiedenen Zeichenlöchern

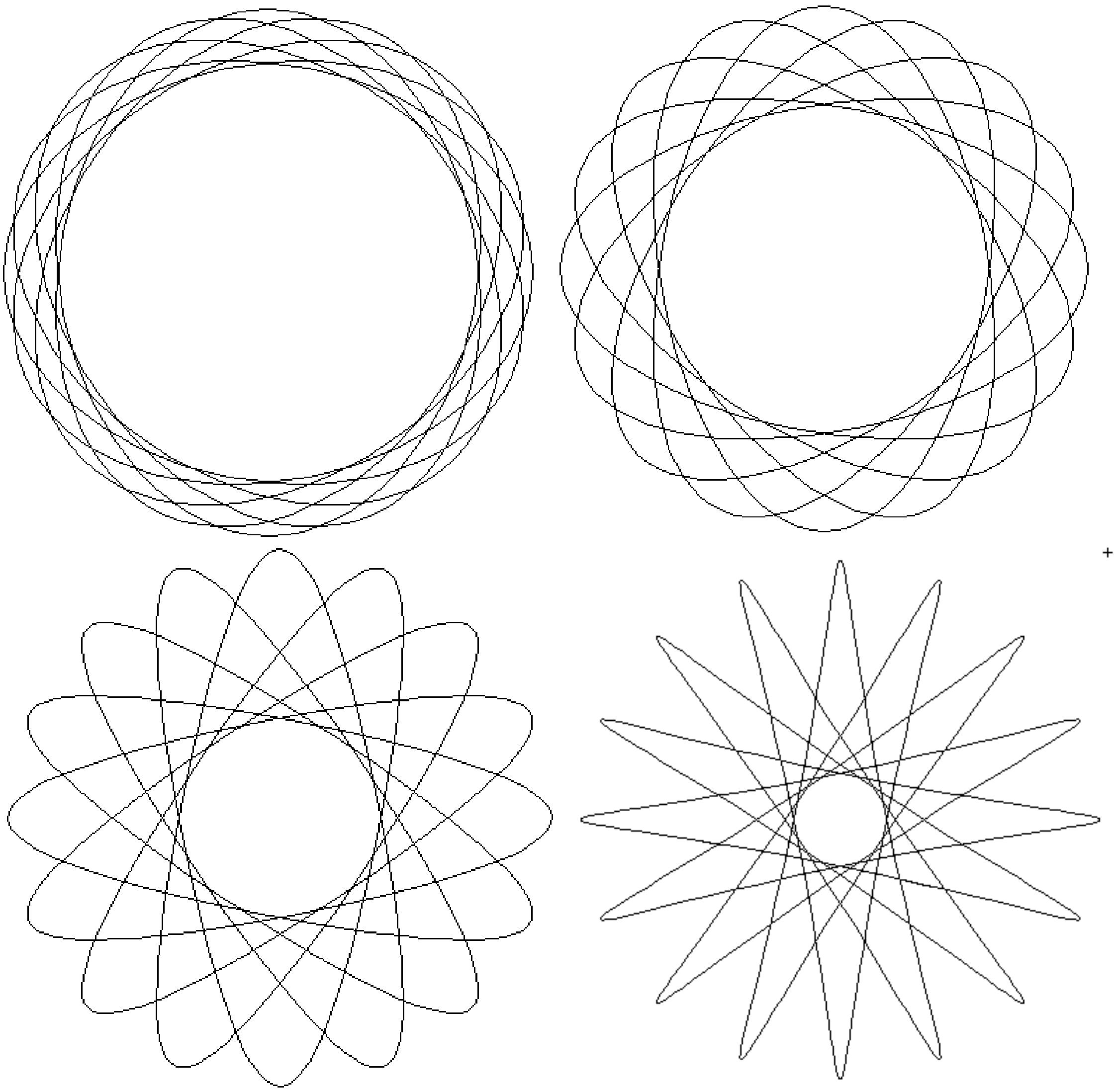


Abbildung 2: Spirographenkurven mit einem Schablonenpaar und verschiedenen Zeichenlöchern

Zeichnet man ganze Serien, so ist gut zu erkennen, daß die entstehenden Bilder sich sehr ähneln, sie unterscheiden sich nur in der Breite des Ornamentstreifens: Zeichenpunkte am Rand des Zahnrades liefern breite Ornamente während Zeichenpunkte in der Mitte nur schmale Ornamentstreifen erzeugen. Die Form der entstehenden Spirographenfigur ist jedoch bei allen Zeichenpunkten gleich. Dieser Sachverhalt ist bei einigen Schablonenpaaren jedoch kaum zu erkennen, wenn man nur je einen außen und einen weit innen liegenden Zeichenpunkt wählt.

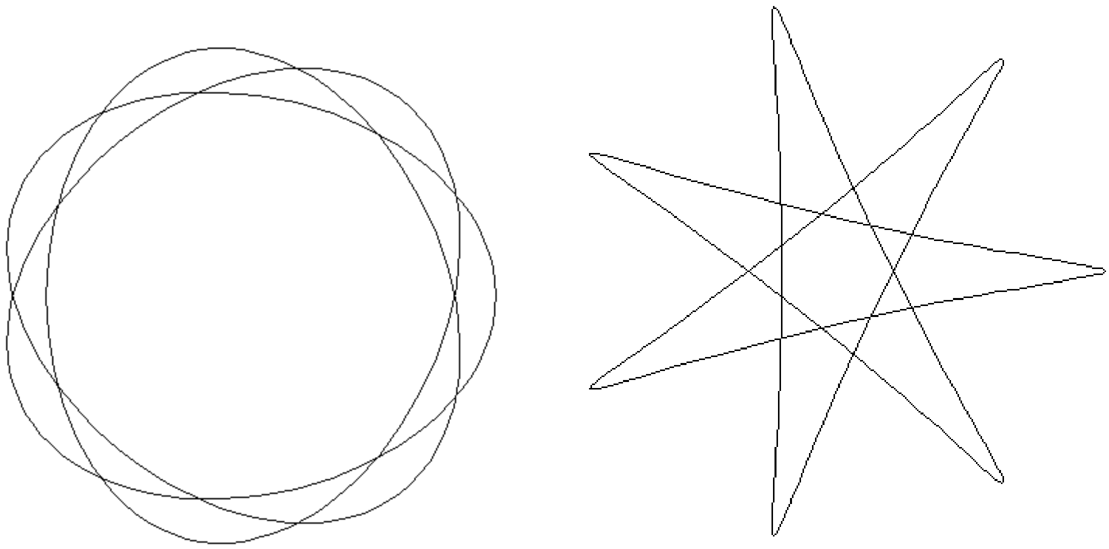


Abbildung 3: Spirographenkurven mit gleichem Schablonenpaar

Hier stellt sich im Unterricht dann die Frage, wie man die Form der Spirographenfiguren beschreibt. Dazu werden die von verschiedenen Schülern / Schülerinnen / Schülergruppen erzeugten Figuren verglichen. Hierzu können Folienkopien der von den Schülern / Schülerinnen erstellten Spirographenfiguren verwendet werden oder vom Lehrer vorbereitete Folien.

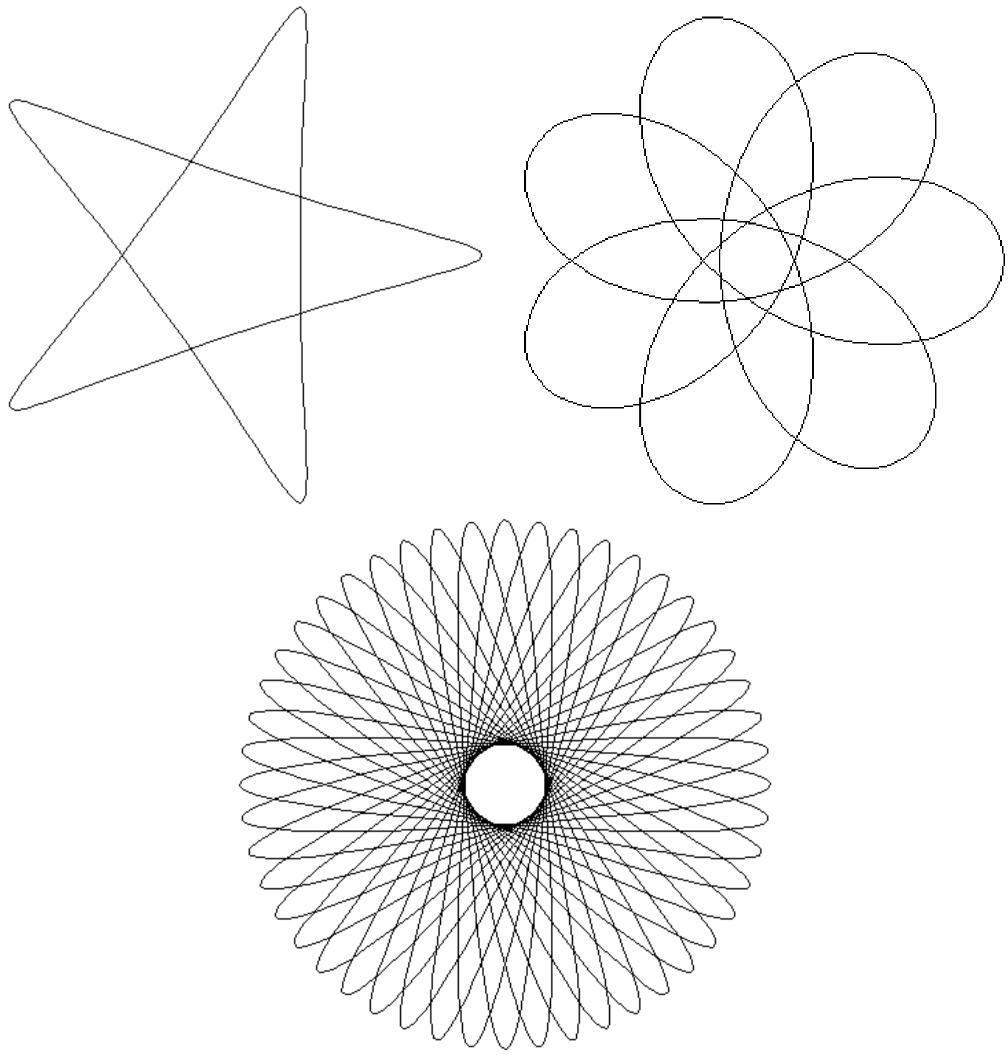


Abbildung 4: Spriographenfiguren von verschiedenen Schablonenenpaaren

Betrachtet man die Figuren jeweils eines Schablonenpaares mit anderen Paaren, so kann man die folgenden beiden Entdeckungen machen:

1. Bilder eines Schablonenpaares stimmen in ihrer Anzahl *k* der ‘Außenpunkte’ überein. Außenpunkte sind die Berührpunkte der Spirographenfigur mit ihrem Umkreis (sechzehn in Abbildung 2, sieben in Abbildung 3). Im Unterricht ist der Ausdruck ‘Außenbogen’ besser, da er sich auf einen ganzen Figurteil bezieht.
2. Bilder eines Schablonenpaares stimmen in ihrer Anzahl *n* der Schnittpunkte der Spirographenfigur mit dem Radius (Verbindungslinie vom Mittelpunkt des Spirographen bis ganz nach außen) der Spirographenfigur überein (sieben in Abbildung 2, drei in Abbildung 3)..

Diese Beobachtungen treffen allerdings nur so lange zu wie der Radius der innen abrollenden Kreisscheibe weniger als halb so groß ist wie die Umkreisschablone. Ist dies nicht der Fall, kommt es für außen liegende Zeichenlöcher zu neuen Phänomenen (Spirographenkurven 2.Art). Es ist sinnvoll durch das Zurückhalten der größeren Schablonen diese Fallunterscheidung auf einen späteren Zeitpunkt im Unterrichtsgang zu verschieben. Dies erleichtert zunächst die Systematisierung und bringt dann für den Unterricht einen typischen kognitiven Konflikt.

Solagng wir uns auf geeignete Schablonenpaare beschränken, sind *n* und *k* also zwei Zahlen, die ein Schablonenpaar kennzeichnen. Die Schülern naheliegende Annahme, es handle sich um die Anzahl Zähne der beiden Schablonen erweist sich schnell als falsch, dafür sind *n* und *k* viel zu klein. Die Bedeutung dieser Zahlen wird deutlich, wenn die Schüler jetzt nochmals Spirographenfiguren zeichnen, jedoch betont langsam, und dabei darauf achten, wie *n* und *k* zustande kommen:

Abbildung 5: 1 Umdrehung

Abbildung 6: 2 Umdrehungen

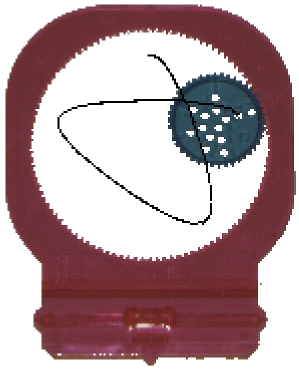


Abbildung 7: 3 Umdrehungen

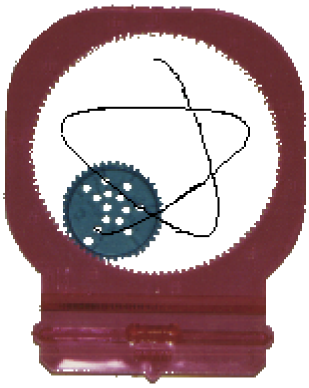


Abbildung 8: 4 Umdrehungen

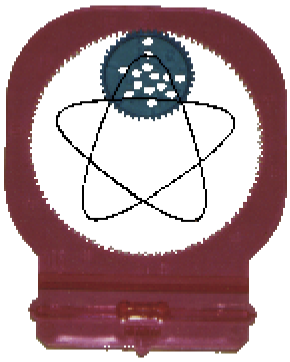


Abbildung 9 :5 Umdrehungen

Die Schülerinnen und Schüler sehen, daß nach jeder Umdrehung des inneren Rades ein Außenbogen entsteht. Jedesmal, wenn das innere Rad ‘einmal herum ist’, also die äußere Schablone einmal von dem inneren Rad abgefahren wurde, entsteht eine Kurve, die einmal um den Mittelpunkt der

Spirographenfigur herum führt. Für große *n* ist das Zählen von *n* zwar schwierig, durch geeignete Systematik aber möglich.

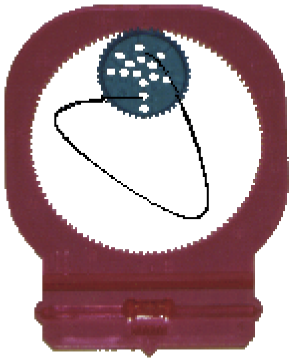


Abbildung 10: 1 Umlauf

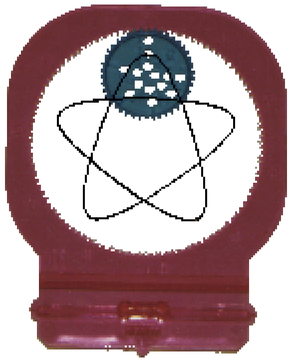


Abbildung 11: 2 Umläufe

An dieser Stelle im Unterrichtsgang muß spätestens thematisiert werden, wann eine Spirographenkurve eigentlich fertig ist.

Eine Spirographenkurve ist fertig, wenn der Stift wieder an derselben Stelle ist – das hilft nicht weiter.

Eine Spirographenkurve ist fertig, wenn das innere Rad wieder an derselben Stelle ist – das ist zu ungenau.

Eine Spirographenkurve ist fertig, wenn das innere Rad wieder an derselben Stelle ist und dieselben Zähne ineinanderstehen – das ist richtig. Wann ist das der Fall?

Eine Spirographenkurve ist fertig, wenn das kleine Rad *k* mal abgelaufen ist und dabei *n* Umrundungen gemacht hat – das ist auch richtig. Wann ist das das gleiche wie vorher?

Das ist der Fall, wenn gilt:

$$\text{Zähnezahl(kleines Rad)} * k = \text{Zähnezahl(Schablone)} * n$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen den Zahnrädern und den gefundenen Zahlen *n*, *k* hergestellt. Dabei sei z_1 die Zahl der Zähne der fest liegenden Schablone und z_2 die Zahl der Zähne des inneren Rades

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{n}{k}$$

Die Inhalte, die in Klasse 6 behandelt werden können, sind hier erschöpft. Für die Klasse 6 ist es gut, wenn die Zahlen der Zähne auf den Schablonen stehen. Für die älteren Schüler stünde dies dem Übergang auf die Kreisgrößen im Weg. Hier wird man statt der Zähnezahlen den Umfang oder, da er besser zu messen ist, den Radius verwenden. Dabei sei U_1 der Umfang und r_1 der Radius der fest liegenden Schablone und U_2 der Umfang und r_2 der Radius des inneren Rades:

$$\frac{n}{k} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

Damit entsteht eine Vieldeutigkeit, wenn man von der Spirographenkurve auf das innere Rad und die äußere Schablone schließen will: ein gegebenen Umfang kann mit unterschiedlich vielen Zähnen realisiert werden, je nachdem wie groß die Zähne sind. Man kann nun durch Messen die Zahngröße bestimmen und erhält dann exakte Radien. Dieser Weg wird sicherlich von Schülerninnen und Schülern vorgeschlagen und kann auch beschritten werden, führt jedoch nicht endgültig zum Ziel. Liegt eine Spirographenfigur vor, bleibt ja neben den Radien oder Zähnezahlen noch eine Frage offen, welches Zeichenloch verwendet wurde. Der Einfluß des Zeichenloches ist schon geklärt, muß aber noch in Gleichungen gegossen werden. Hierfür muß man die Spirographenfigur ausmessen. Es ist mit den Schülern zu erörtern, was zu messen ist: die oben beschriebenen Breite des Ornamentbandes oder der Innenradius r_i und der Außenradius r_a der Spirographenkurve. Letzteres ist offensichtlich informationshaltiger: neben der Breite des Ornamtbandes wird auch die Gesamtgröße der Spirographenfigur berücksichtigt und so fließen auch r_1 und r_2 wieder in die Betrachtung ein. Außenradius soll exakt heißen Radius des Umkreises der Spirographenkurve. Innenkreis analog, sofern er existiert.

Sind r_i und r_a bestimmt, kann man zwei Gleichungen aufstellen. Dazu muß noch der Zeichenpunkt als Größe eingeführt werden. $p\cdot r_2$ soll die Entfernung des Zeichenpunktes vom Mittelpunkt des bewegten Rades sein. Dann gilt

$$r_a = r_1 - r_2 + p\cdot r_2$$
$$r_i = r_1 - r_2 - p\cdot r_2$$

Diese Gleichung können die Schüler aufstellen, wenn sie sich mit Hilfe des Spirographen die Zeichensituation für r_i und r_a klar machen.

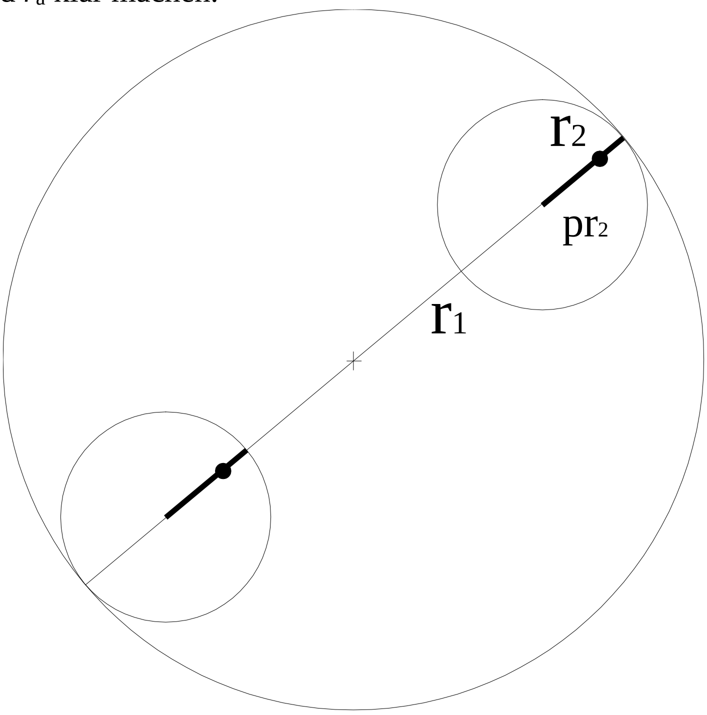


Abbildung 12: Innenkreis und Außenkreis Zeichensituation

Rechts oben in dem Bild ist die Zeichensituation für den Außenkreis, links unten für den Innenkreis dargestellt.

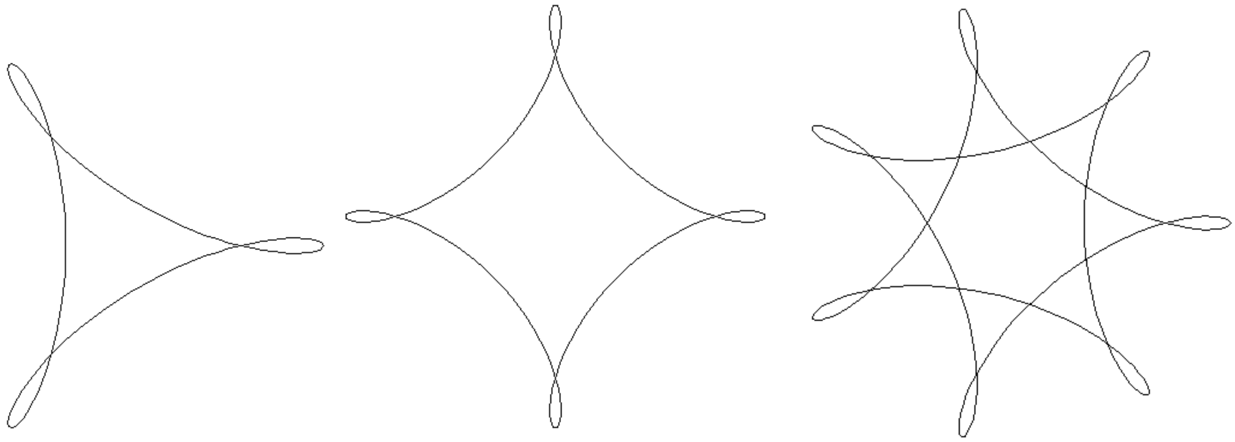
Nun hat man ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten erarbeitet, das lösbar ist:

$$\begin{aligned} r_a &= r_1 - r_2 + p\cdot r_2 \\ r_i &= r_1 - r_2 - p\cdot r_2 \\ \frac{n}{k} &= \frac{r_2}{r_1} \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} r_1 &= \frac{k(r_a + r_i)}{2(k-n)} \\ r_2 &= \frac{n(r_a + r_i)}{2(k-n)} \\ p &= \frac{(k-n)(r_a - r_i)}{n(r_a + r_i)} \end{aligned}$$

Im Unterricht wird dieses Gleichungssystem für konkrete Zahlen bearbeitet werden. Damit hat man aus einer vorliegenden Spirographenfigur alle notwendigen Informationen gewonnen, um Schablone, Zeichenrad und Zeichenpunkt auszuwählen und die Figur zu reproduzieren.

Kurven 2. Art

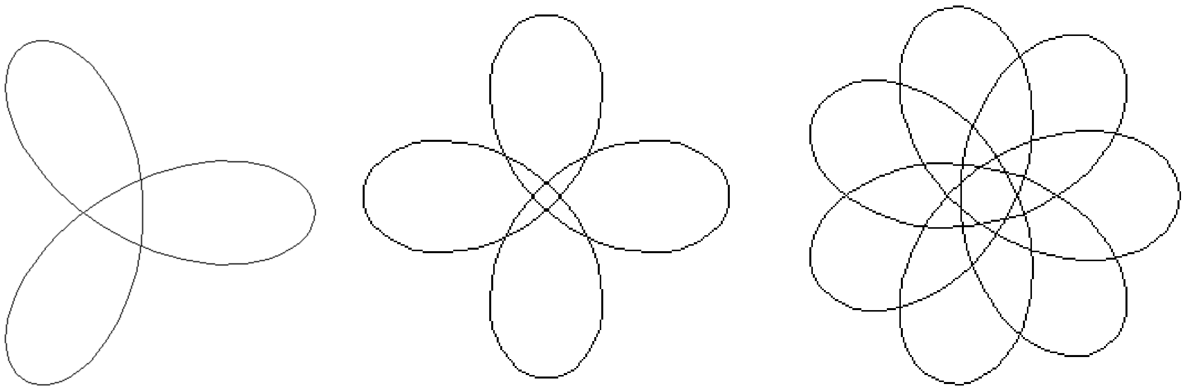
Spätestens jetzt kann der ausstehende kognitive Konflikt gezündet werden:



$n_{temporär}=3$, n=2, k=3 | $n_{temporär}=3$, n=3, k=4 | $n_{temporär}=4$, n=5, k=7

Abbildung 13: Spirographenkurven der 2. Art

An diesen Spirographenfiguren fällt sofort auf, daß n nicht mehr nach der üblichen Methode zu bestimmen ist, da der Radius nicht mehr in alle Richtungen die Figur gleich häufig schneidet. Zeichnet man die gleichen Figuren mit kleinerem p, so zeigt sich wieder das gewohnte Bild:



n=2, k=3 | n=3, k=4 | n=5, k=7

Abbildung 14:Die gleichen Schablonenpaare wie oben mit kleinerem p

Die Schüler können durch Vergleich der jeweiligen Zeichnungen auch herausfinden, woran dieses Phänomen liegt: wenn $r_2 + p \cdot r_2 > r_1$ ist, verläuft die gezeichnete Linie stückweise ‘auf der falschen Seite’ des Mittelpunktes der Schablone. Geometrisch ist dabei gut erkennbar, daß die Außenbögen Schleifen bilden. Diese sind also ein gutes Kennzeichen dieser Spirographenkurven 2. Art. Darüber hinaus haben diese Kurven vom Mittelpunkt aus gesehen eine andere Krümmung als die zunächst betrachteten Spirographenkurven.

Für übersichtliche Spirographenkurven 2. Art mit kleinen k kann man durch Verformung (Morphing) die zugehörige Kurve 1.Art skizzieren und dann anhand dieser Skizze n bestimmen. Dabei entsteht schnell das Bedürfnis nach einem einfacheren Verfahren. Die Beschäftigung mit dem Morphing hilft den Schülerinnen und Schülern in der Diskussion ein geeignetes Zählverfahren zu entdecken:

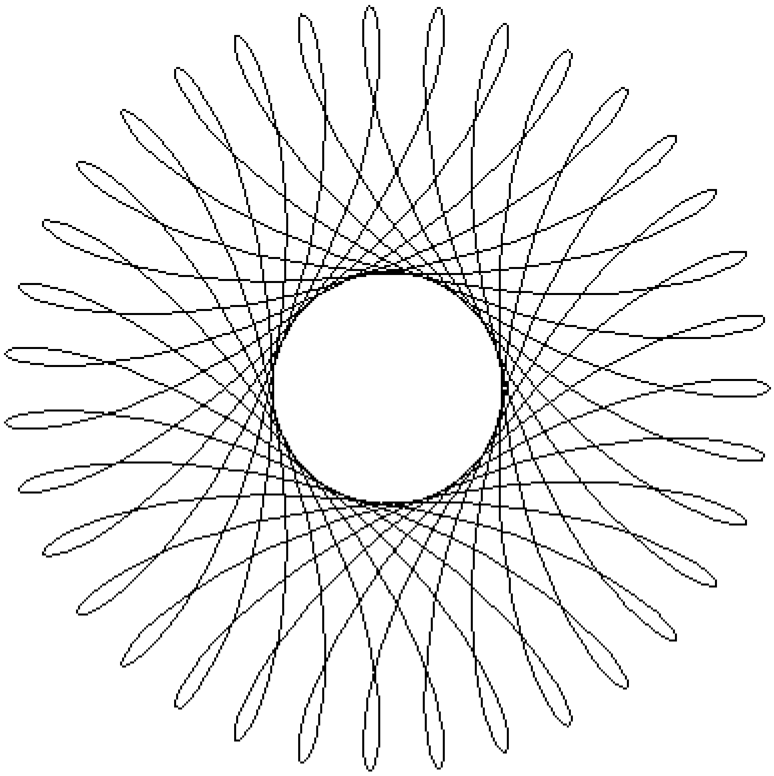


Abbildung 15: Eine unübersichtliche Spirographenkurve 2. Art

Als Leitidee sollte man den Schülern beim Morphing-Verfahren mit auf den Weg geben darauf zu achten, wie sich das ermittelte $n_{\text{temporär}}$ ändert: wie bei den Spirographenkurven 1.Art zählt man die Schnittpunkte mit einem festen Radius, am besten eine Verbindungslinie vom Mittelpunkt zu einem Außenbogen. Beim Morphing überschreiten nun etliche Kurvenstücke den Mittelpunkt, wobei einige $n_{\text{temporär}}$ erhöhen, andere verringern. Dies kann man sich jedoch bereits an der Ausgangskurve für jeden Bogen überlegen und so statt der Zeichnung nur einen geschickten Zählprozess durchführen. Die Zahl an den Bögen bezieht sich jeweils auf den fett markierten Teil und seine Fortsetzung. Dabei heißt '-1', dass der Bogen beim Morphing beim Überschreiten des Mittelpunktes n um eins erniedrigt, während '+1' n um eins erhöht. Diese Zahlen machen nur Sinn unter Berücksichtigung der Richtung, in der $n_{\text{temporär}}$ gezählt wurde (hier senkrecht nach oben zur –1):

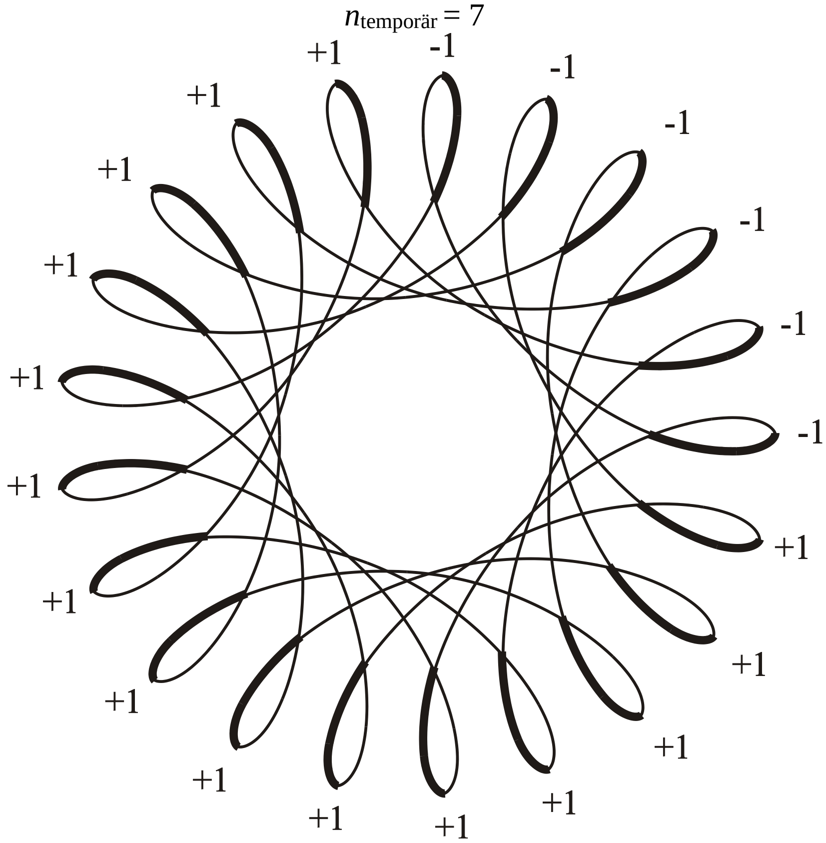


Abbildung 16: Zählprozess für Kurven der 2. Art

In Abbildung 16 ergibt sich $n_{temporär}$ = 7. Die ersten 6 fett markierten Bögen werden überschreiten beim Morphing den Mittelpunkt nach unten, so dass bei der Zählung senkrecht nach oben diese Bögen subtrahiert werden müssen. Die anderen 15 Bögen kommen jedoch zur Zählung hinzu. Damit ergibt sich

$$n = 7 - 6 + 15 = 16.$$

Die Gleichung $r_i = r_1 - r_2 - p \cdot r_2$ gilt überraschenderweise nach wie vor, muß aber neue begründet werden. Das zugehörige Gleichungssystem bleibt damit auch erhalten.

Weitere Ansätze

Im Rahmen von Unterricht und Lehrerfortbildung traten zur Bestimmung von *n* folgende weitere Ideen auf:

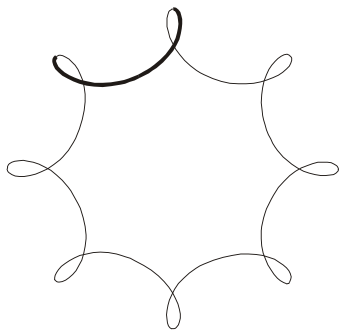


Abbildung 17: Kurve n=96 k=84

Die Argumentation basiert auf Analysen während des Zeichnens, wenn die Zähnezahlen der Schablonen bekannt sind. Der erste gezeichnete Bogen ist fett markiert. Die innere Schablone rollt beim Zeichnen nach rechts ab. Wenn der fett gezeichnete Bogen entstanden ist, ist man offensichtlich zu

$\frac{84}{96} = \frac{7}{8}$ mit der Figur fertig, da man auf der äußeren Schablone auf 84 der 96 Zähne abgerollt ist.
Die 8 kann wie gewohnt durch Abzählen aller Außenbögen ermittelt werden, während die 7 gewonnen wird, indem man am Start mit Null beginnend rechts herum die Außenbögen zählt bis zum Ende der fetten Linie. Dieses Verfahren gilt für alle Spirographenkuren[1].

Die nächste Idee gibt eine andere Antwort auf die Frage ‚wann hat ist die innere Schablone einmal abgerollt?‘ nämlich, wenn der Zeichenpunkt sich wieder in die gleiche Richtung bewegt. Man verfolgt also die Spirographenkurve und markiert die Punkte gleicher Tangentenrichtung (gerichtet) um *n* zu erhalten[2]:

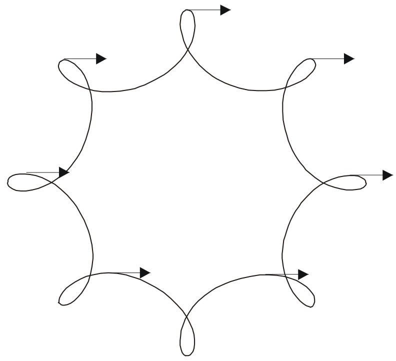
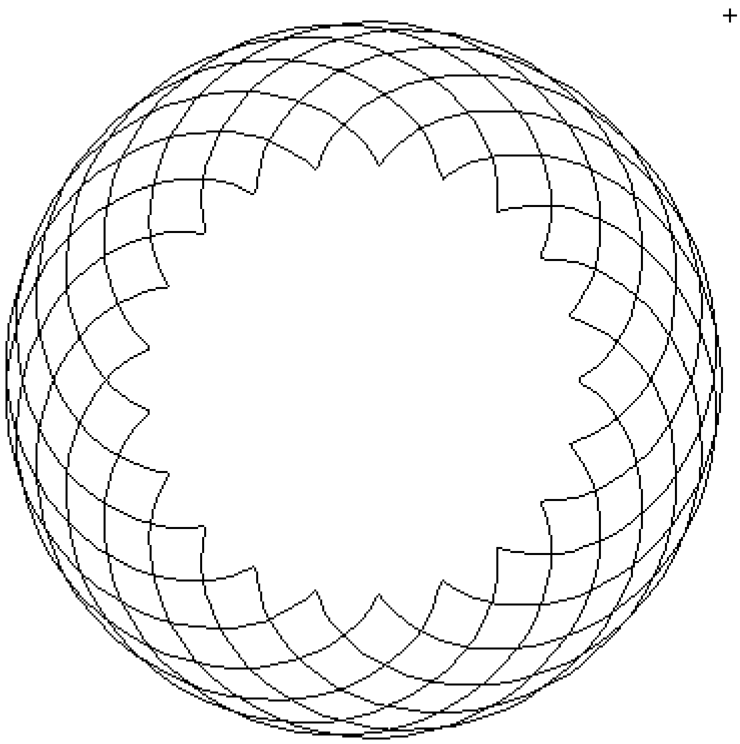


Abbildung 18: Spirographenfigur mit Tangentenpfeilen

Außen Abrollen

Die angestellten Betrachtungen können leicht auf den Fall übertragen werden, daß man statt des Ringes auch eine Kreisscheibe nimmt und eine zweite Kreisscheibe außen herum abrollt.



[1] Die Idee stammt von einem Schüler aus dem 11 Jahrgang.
[2] Die Idee stammt von einem Kollegen aus der Lehrerfortbildung

Abbildung 19:Eine Außenabrollkurve

Die Überlegungen zu n und k sind analog, Kurven der 2. Art können nicht auftreten. Aus diesem Grund kann diese Problemstellung auch Gegenstand einer Klausuraufgabe sein, wobei die Schülerinnen und Schüler dann ausreichend Zeit haben müssen, um mit dem Spirographen zu experimentieren.
Als neue Frage tritt natürlich das Problem auf, zu entscheiden, welchen Typ Spirographenfigur man vor sich hat: wurde mit Schablone und Kreisscheibe gezeichnet (Typ ‚Innen‘) oder mit zwei Kreisscheiben (Typ ‚Außen‘)?
Typ ‚Außen‘ hat offensichtlich sowohl Außenbögen wie die ersten behandelten Spirographenkurven als auch Innenbögen, also die nach innen gerichteten Spitzen (Abbildung 19). Dies kommt beim Typ Innen nur bei der 2. Art vor. Dort sind jedoch die Außenbögen spitz (Schleifen), beim Typ Außen sind die Außenbögen sehr lang gezogen. Die beiden Spirographenfiguren lassen sich also gut unterscheiden.

Spirographenkurven mit dem Computer

Nach intensivem praktischem Umgang mit den Spirographenkurven können die Schülerinnen und Schüler diese mit Hilfe einer geeigneten Software z.B. DERIVE oder einer Tabellenkalkulation auch vom Computern zeichnen lassen. Da die Kurven selbst gezeichnet wurden, fällt es nicht so schwer, diese Kurven als mit einer Zeitvariablen parametrisierte Kurven aufzufassen.

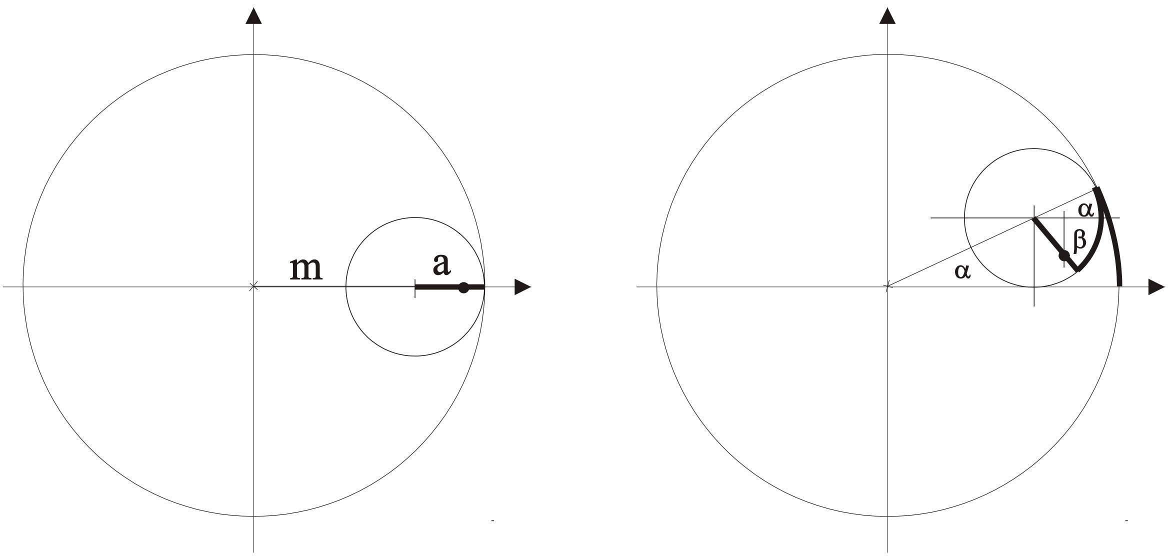


Abbildung 20:Analyse einer Rollkurve

Die Länge *m* ist der Abstand des Mittelpunktes der Schablone zum Mittelpunkt der Kreisscheibe, also $m=r_1-r_2$. Die Länge *a* ist der Abstand des Zeichenpunktes vom Mittelpunkt der Kreisscheibe, also $a=p\cdot r_2$. Für die Analyse der Rollkurve benötigt man die in der rechten Zeichnung auftretenden Abschnitte und Winkel. Der Winkel β bezeichnet dabei den Drehwinkel des inneren Kreises und beschreibt den ganzen fett gezeichneten Bogen. Aufgrund der bereits vorliegenden Erfahrung der Schüler können sie nach gegebener linken Zeichnung und einigen Hinweisen die rechte Zeichnung selbst anfertigen. Die Bezeichnungen der Winkel und die Beziehung zwischen α, β und r_1, r_2 sind durch den Vergleich der fett gezeichneten abgerollten Strecken leicht zu erkennen: $\frac{\alpha}{-\beta}=\frac{r_2}{r_1}\Rightarrow\beta=-\frac{r_1\alpha}{r_2}$. Das negative Vorzeichen rührt daher, daß sich die Kreisscheibe um ihren Mittelpunkt rechts herum dreht, um den Mittelpunkt der Schablone jedoch links herum.

Die Koordinaten (also die Projektionen der Strecken a und m auf die Koordinatenachsen) des Zeichenpunktes können nun mit Hilfe von m, a, α und β ermittelt werden. Zur besseren Übersichtlichkeit ist es günstig, die Größen in einer Tabelle zu sortieren, da die Addition von Wertepaaren den Schülern nicht bekannt sein dürfte. Verwendet man an dieser Stelle direkt DERIVE, ist die Listenschreibweise notwendig, um die gewünschten Kurven zu erhalten.

	x-Koordinate	y-Koordinate
Projektion von m	$m\cos(\alpha) = (r_1 - r_2)\cos(\alpha)$	$m\sin(\alpha) = (r_1 - r_2)\sin(\alpha)$
Projektion von a	$a\cos(\alpha+\beta) = pr_2 \cos\left(\alpha\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)\right)$	$a\sin(\alpha+\beta) = pr_2 \sin\left(\alpha\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)\right)$
Koordinaten des Zeichenpunktes	$(r_1 - r_2)\cos(\alpha) + pr_2 \cos\left(\alpha\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)\right)$	$(r_1 - r_2)\sin(\alpha) + pr_2 \sin\left(\alpha\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)\right)$

Die Betrachtung der Spriographenkurven Typ ‚Außen‘ verläuft analog, kann somit wiederum als Übung oder als Teil einer Klausur eingesetzt werden.
Die untere Zeile kann in DERIVE als Wertepaar hingeschrieben und nach Einsetzen konkreter Zahlen für r_1, r_2, p mit dem üblichen Zeichenbefehl geplottet werden. Dabei treten noch zwei kleine Probleme auf, die jedoch einfach gelöst werden können, wenn den Schülern DERIVE bekannt ist.

- In der dargestellten Weise wird die Zeichnung auf dem Bildschirm jedesmal eine andere Größe erhalten, wenn andere Werte für r_1 auftreten. Es ist vorteilhaft, die Koordinaten des Zeichenpunktes zu normieren, indem man sie durch r_1 teilt.
- Etwas schwieriger ist es, den Bereich zu bestimmen, den α durchlaufen soll. Hierfür benötigt man die Anzahl n der Umläufe $n = \frac{r_2}{\mathrm{ggt}(r_1, r_2)}$. α läuft dann von $-n\pi$ bis $n\pi$. Ersetzt man in den Koordinaten des Zeichenpunktes α durch $n\delta$ so läuft δ von $-\pi$ bis π, der Voreinstellung von DERIVE.

Haben die Schüler keine Erfahrungen mit DERIVE, wird man zunächst über die Einstellungen des Intervalles für α und die Zoomtiefe das Problem beheben.
Mit Hilfe der Computergestützten Herstellung der Spirographenkurven können auch Rollkurven mit $p>1$ produziert werden. Dadurch entstehen weitere Formen, die erkundet werden können. Ebenso können jetzt klassische Zykloide erzeugt und analysiert werden.
Der Aufbau einer Tabellenkalkulation zum Zeichnen der Spirographenkurven kann wie in folgendem Beispiel erfolgen.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	r1=	105		Schrittweite=		0,1		
2	r2=	63						
3	p=	0,8						
4	r1-r2=	42						
5	r2*p=	50						
6								
7	alpha	beta	mx	my	ax	ay	zx	zy
8	0	0	42	0	50,4	0	92,4	0
9	0,05	-0,1	41,9	2,1	50,4	-1,7	92,3	0,42
10	0,1	-0,2	41,8	4,19	50,3	-3,4	92,1	0,84
11	0,15	-0,3	41,5	6,28	50,1	-5	91,7	1,24

Den Rechnungen liegen die folgenden Formeln zugrunde:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	r1=	105			Schrittweite=	0,1		
2	r2=	63						
3	p=	0,8						
4	r1-r2=	=B1-B2						
5	r2*p=	=B2*B3						
6								
7	alpha	beta	mx	my	ax	ay	zx	zy
8	0	=-B$1*A8/B$2	=B$4*COS(A8)	=B$4*SIN(A8)	=B$5*COS(A8+B8)	=B$5*SIN(A8+B8)	=C8+E8	=D8+F8
9	=A8+F$1	=-B$1*A9/B$2	=B$4*COS(A9)	=B$4*SIN(A9)	=B$5*COS(A9+B9)	=B$5*SIN(A9+B9)	=C9+E9	=D9+F9
10	=A9+F$1	=-B$1*A10/B$2	=B$4*COS(A10)	=B$4*SIN(A10)	=B$5*COS(A10+B10)	=B$5*SIN(A10+B10)	=C10+E10	=D10+F10
11	=A10+F$1	=-B$1*A11/B$2	=B$4*COS(A11)	=B$4*SIN(A11)	=B$5*COS(A11+B11)	=B$5*SIN(A11+B11)	=C11+E11	=D11+F11

Es werden dabei einige hundert Zeilen gefüllt, indem die Zeile 9 nach unten kopiert wird. Dabei werden die Zellbezüge ohne ‘$’ automatisch angepaßt. In den Spalten G und H stehen dann die Koordinaten der Kurvenpunkte. Dazu werden in B1 bis B3 die Parameter der Spirographenkurve eingegeben. In A8 steht der Startwinkel, von dem gezeichnet wird und in F1 die Schrittweite, um die der Winkel in jeder Zeile erhöht wird. Hier kann man durch Eingabe größerer Zahlen erreichen, daß lange Spirographenkurven vollständig gezeichnet werden. Mit diesen Einträgen entsteht das folgende Diagramm:

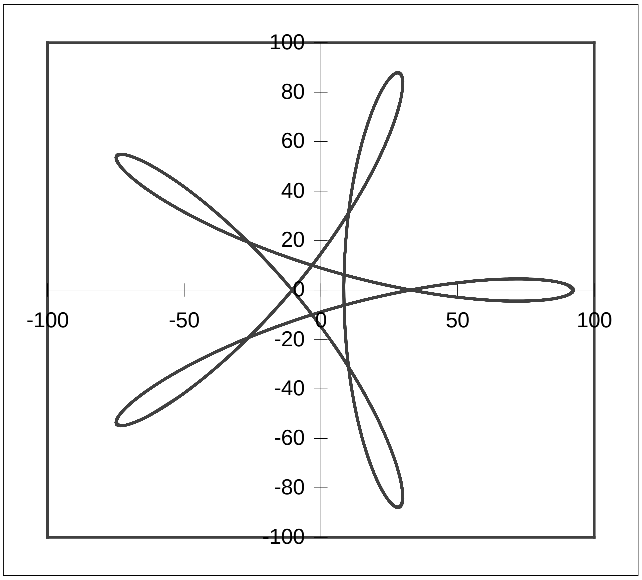


Abbildung 21: Spirographenkurve mit einer Tabellenkalkulation

Damit sind die Spirographenkurven in ihrer Struktur geklärt und reproduziert. Es kann aber noch weiter in diesem Problemkreis gearbeitet werden: mehrere Schnittpunkte der Spirographenkurve liegen auf einer Geraden durch den Kreismittelpunkt, warum ist das so? Planetenbahnen wurden nach Ptolemäus auch durch Rollkurven beschrieben, wie ist das zu erklären? Wie identifiziert man Kurven mit p>1? Wie differenziert man Kurven und welche Bedeutung hat die Ableitung? Welche weiteren einfachen Kurven kann man parametrisiert darstellen? Der Spirograph – ein Gegenstand für den Mathematikunterricht!